УДК 517.91:532.2

Л. М. ТРАСКОВЕЦЬКА
Хмельницький національний університет

ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є ІЗ СПЕКТРАЛЬНИМ ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ НАПІВОБМЕЖЕНОГО ТРИСКЛАДОВОГО СЕРЕДОВИЩА

Методом дельта-подібної послідовності запроваджено інтегральне перетворення Фур'є для напівобмеженого трискладового середовища в припущенні наявності спектрального параметру в умовах спряження та крайових умовах, який враховує нестаціонарні режими масообміну на поверхнях для реальних фізичних полів.

Запровадимо методом дельта-подібної послідовності інтегральне перетворення, породжене на множині $I_2^+ = \{x : x \in (l_0, l_1) \cup (l_1, l_2) \cup (l_2, +\infty); l_2 \ge 0\}$ диференціальним оператором Фур'є

$$G_2 = \left[\sum_{k=1}^{2} a_k^2 \theta(x - l_{k-1})\theta(l_k - x) + a_3^2 \theta(x - l_2)\right] \frac{d^2}{dx^2}. \tag{1}$$

Тут $a_j^2 > 0, \theta(x)$ – одинична функція Хевісайда [1]. Припустимо, що в точках $x = l_k$ $(k = 1,2)$ спряження інтервалів виконуються рівності

$$\left[\left(\tilde{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dx} + \tilde{\beta}_{j1}^k\right) g_k - \left(\tilde{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dx} + \tilde{\beta}_{j2}^k\right) g_{k+1}\right]\Big|_{x=l_k} = 0; \quad j,k = 1,2 \tag{2}$$

для будь-якої вектор-функції $g(x) = \{g_1(x); g_2(x); g_3(x)\}$ із області визначення оператора G_2 ,а в точці $x = l_0$ справджується крайова умова

$$(\tilde{\alpha}_{11}^0 \frac{d}{dx} + \tilde{\beta}_{11}^0) g_1(x)|_{x=l_0} = 0. \tag{3}$$

Розглянемо спектральну сингулярну задачу Штурма-Ліувілля: побудувати обмежений на нескінченності ненульовий розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь Фур'є

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + b_j^2(\beta)\right) V_j(x,\beta) = 0, \quad x \in (l_{j-1}, l_j), \ j = 1,2,3; l_0 \ge 0, l_3 = +\infty \tag{4}$$

за умовами спряження (2) та крайовою умовою (3), де $V_j(x,\beta)$ – компоненти власної вектор-функції

$$V(x,\beta) = \{V_1(x,\beta); V_2(x,\beta); V_3(x,\beta)\}.$$

При наявності фундаментальної симтеми розв'язків $\{\cos b_j x, \sin b_j x\}_{j=1}^3$ розв'язок крайової задачі (1)-(4) будуємо за правилами:

$$V_j(x,\beta) = A_j \cos b_j x + B_j \sin b_j x, \quad j = 1,2,3. \tag{5}$$

Підставивши (5) в (2) і (3), отримаємо алгебраїчну систему з п'яти рівнянь для визначення сталих A_j, B_j $(j = 1,2,3)$:

$$\begin{aligned} &v_{11}^{01}(b_1 l_0) A_1 + v_{11}^{02}(b_1 l_0) B_1 = 0 \\ &v_{j1}^{11}(b_1 l_1) A_1 + v_{j1}^{12}(b_1 l_1) B_1 - v_{j2}^{11}(b_2 l_1) A_2 - v_{j2}^{12}(b_2 l_1) B_2 = 0 \\ &v_{j1}^{21}(b_2 l_2) A_2 + v_{j1}^{22}(b_2 l_2) B_2 - v_{j2}^{21}(b_3 l_2) A_3 - v_{j2}^{22}(b_3 l_2) B_3 = 0, \qquad j = 1,2. \end{aligned} \tag{6}$$

Визначимо функції:

$$\delta_n(\beta) = \prod_{m=1}^{n} c_{21,m} b_{m+1} = \prod_{m=1}^{n} c_{21,m} \alpha_{m+1}^{-1} (\beta^2 + k_{m+1}^2)^{1/2};$$

$$\psi_{jm}^k(b_k l_k, b_{k+1} l_k) = v_{11}^{kj}(b_k l_k) v_{22}^{km}(b_{k+1} l_k) - v_{21}^{kj}(b_k l_k) v_{12}^{km}(b_{k+1} l_k);$$

$$\omega_{jm}(\beta) = \omega_{j-1,2}(\beta) \psi_{1m}^j(b_j l_j, b_{j+1} l_j) - \omega_{j-1,1}(\beta) \psi_{2m}^j(b_j l_j, b_{j+1} l_j).$$

Якщо, розв'язавши систему (6), позначити $A_1 \equiv A_0 \omega_{02}(\beta)$, $B_1 \equiv -A_0 \omega_{01}(\beta)$ й підставити одержані вирази A_j, B_j у рівності (5), то при $A_0 = c_{21,1}c_{21,2}b_2b_3$ одержимо:

$$V_1(x,\beta) = \prod_{k=1}^{2} c_{21,k}b_{k-1}(\omega_{02}\cos b_1x - \omega_{01}\sin b_1x),$$
$$V_2(x,\beta) = c_{21,2}b_3(\omega_{12}\cos b_2x - \omega_{11}\sin b_2x),$$
$$V_3(x,\beta) = \omega_{22}\cos b_3x - \omega_{21}\sin b_3x) \qquad (7)$$

Наявність спектральної функції

$$V(x,\beta) = \sum_{j=1}^{2} V_j(x,\beta)\theta(x-l_{j-1})\theta(l_j - x) + V_3(x,\beta)\theta(x-l_2),$$

вагової функції

$$\sigma(x) = \sum_{j=1}^{2}\sigma_j\theta(x-l_{j-1})\theta(l_j - x) + \sigma_3\theta(x-l_2), \;\; де \;\; \sigma_1 = \frac{c_{11,1}c_{11,2}}{c_{21,1}c_{21,2}\alpha_1^2}; \;\; \sigma_2 = \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}\alpha_2^2}; \;\; \sigma_3 = \frac{1}{\alpha_3^2},$$

та спектральної щільності

$$\Omega(\beta) = \beta b_3^{-1}\left([\omega_{22}(\beta)]^2 + [\omega_{21}(\beta)]^2\right)^{-1}$$

дає можливість визначити пряме й обернене інтегральне перетворення Фур'є ізспектральним параметром на декартовій півосі $x \geq l_0$ з двома точками спряження:

$$F[g(x)] = \int_{l_0}^{\infty} g(x)V(x,\beta)\sigma(x)dx \equiv \tilde{g}(\beta), \qquad (8)$$

$$F^{-1}[\tilde{g}(x)] = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\tilde{g}(\beta)V(x,\beta)\Omega(\beta)d\beta \equiv g(x). \qquad (9)$$

Математичним обгрунтуванням запровадженого інтегрального перетворення Фур'є є твердження.

Теорема 1 (про інтегральне зображення). Якщо вектор-функція $g(x) = \{g_1(x); g_2(x); g_3(x)\}$ неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на множині (l_0,∞), то для будь-якого $x \in I_2^+$ справджується інтегральне зображення

$$g(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}V(x,\beta)\Omega(\beta)\int_{l_0}^{\infty}g(\zeta)V(\zeta,\beta)\sigma(\zeta)\,d\zeta d\beta. \qquad (10)$$

Теорема 2 (про основну тотожність): Якщо вектор-функція $g(x) \in C^{(3)}(I_2^+)$ задовольняє крайові умови

$$\left(\tilde{\alpha}_{11}^0\frac{d}{dx} + \tilde{\beta}_{11}^0\right)g_1(x)\Big|_{x=l_0} = g_{10}, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{d^m g_3}{dx^m} = 0, \;\; m = 0,1 \qquad (11)$$

і умови спряження

$$\left[\left(\tilde{\alpha}_{j1}^k\frac{d}{dx} + \tilde{\beta}_{j1}^k\right)g_k(x) - \left(\tilde{\alpha}_{j2}^k\frac{d}{dx} + \tilde{\beta}_{j2}^k\right)g_{k+1}(x)\right]\Big|_{x=l_k} = \psi_{jk}, \quad j,k = 1,2, \qquad (12)$$

то справджується основна тотожність інтегрального перетворення диференціального оператора G_2:

$$F[G_2[g(x)]] = -\beta^2\tilde{g}(\beta) - \sigma_1 a_1^2(\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1}V_1(l_0,\beta)g_{10} - \sum_{j=1}^{3}k_j^2\int_{l_{j-1}}^{l_j}g_j(x)V_j(x,\beta)\sigma_j dx +$$
$$\sum_{k=1}^{2}\frac{a_k^2\sigma_k}{c_{11,k}}\left[\left(\tilde{\alpha}_{12}^k\frac{d}{dx} + \tilde{\beta}_{12}^k\right)V_{k+1}(x,\beta)\Big|_{x=l_0}\psi_{2k} - \left(\tilde{\alpha}_{22}^k\frac{d}{dx} + \tilde{\beta}_{22}^k\right)V_{k+1}(x,\beta)\Big|_{x=l_k}\psi_{1k}\right], \;\; l_3 = \infty \qquad (13)$$

Доведення. З умов спряження встановлюємо базову тотожність

$$\left[g_k'(x)V_k(x,\beta)-g_k(x)V_k'(x,\beta)\right]\Big|_{x=l_k}=\frac{c_{21,k}}{c_{11,k}}\left[g_{k+1}'(x)V_{k+1}(x,\beta)-g_{k+1}(x)V_{k+1}'(x,\beta)\right]\Big|_{x=l_k}+$$
$$+c_{11,k}^{-1}\left[\left(\tilde{\alpha}_{12}^k\frac{d}{dx}+\tilde{\beta}_{12}^k\right)V_{k+1}(x,\beta)\Big|_{x=l_k}\psi_{2k}-\left(\tilde{\alpha}_{22}^k\frac{d}{dx}+\tilde{\beta}_{22}^k\right)V_{k+1}(x,\beta)\Big|_{x=l_k}\psi_{1k}\right],\ k=1,2. \tag{14}$$

Якщо інтеграл в правій частині рівності (13) проінтегрувати двічі частиеами, то одержимо:

$$F\left[G_2\left[g(x)\right]\right]\equiv\sum_{j=1}^{3}a_j^2\int\limits_{l_{j-1}}^{l_j}\frac{d^2g_j(x)}{dx^2}V_j(x,\beta)\sigma_j dx=a_1^2\sigma_1(g_1'V_1-g_1V_1')\Big|_{l_0}^{l_1}+a_2^2\sigma_2(g_2'V_2-g_2V_2')\Big|_{l_1}^{l_2}+$$
$$+a_3^2\sigma_3(g_3'V_3-g_3V_3')\Big|_{l_2}^{\infty}-\sum_{j=1}^{3}\left(\beta^2+k_j^2\right)\int\limits_{l_{j-1}}^{l_j}g_j(x)V_j(x,\beta)\sigma_j dx. \tag{15}$$

Враховуючи базову тотожність (14), в силу структури вагової функції $\sigma(x)$ позаінтегральні члени в точках $x=l_1$ та $x=l_2$ перетворюються в суму, в якій беруть участь функції ψ_{jk}. Якщо $\tilde{\alpha}_{11}^0\neq 0$, отримаємо:

$$\left(g_1'V_1-g_1V_1'\right)\Big|_{x=l_0}=\left[\frac{1}{\tilde{\alpha}_{11}^0}\left(\tilde{\alpha}_{11}^0g_1'+\tilde{\beta}_{11}^0g_1\right)V_1-\frac{\tilde{\beta}_{11}^0}{\tilde{\alpha}_{11}^0}g_1V_1-g_1V_1'\right]\Big|_{x=l_0}=$$
$$=\left(\tilde{\alpha}_{11}^0\right)^{-1}V_1(l_0,\beta)\left(\tilde{\alpha}_{11}^0\frac{dg_1}{dx}+\tilde{\beta}_{11}^0g_1\right)\Big|_{x=l_0}-\left(\tilde{\alpha}_{11}^0\right)^{-1}g_1(l_0)\left(\tilde{\alpha}_{11}^0\frac{dV_1}{dx}+\tilde{\beta}_{11}^0V_1\right)\Big|_{x=l_0}=$$
$$=\left(\tilde{\alpha}_{11}^0\right)^{-1}V_1(l_0,\beta)g_{10}. \tag{16}$$

Якщо підставити (16) в (15) і розкласти суму на два доданки, то одержимо тотожність (13).

Тотожність (13) дає можливість будувати точні аналітичні розв'язки математичних моделей задач квазістатистики і динаміки для напівобмеженого трискладового кусково-однорідного середовища з урахуванням нестаціонарності масообміну на лініях розділу $x=l_j$, $j=1,2$.

Список використаних джерел

1. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
2. Ленюк М. П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. – Киев, 1983. – 62 с.
3. Ленюк М. П., Трасковецкая Л. М. Гибридные интегральные преобразования Ханкеля 1-го рода на сегменте с двумя точками сопряжения / Хмельниц. технол. ин-т быт. обслуж. – Хмельницкий, 1989. – 23 с.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.:Наука, 1972. – 735 с.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 746 с.
6. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматиз, 1959. – 468 с.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производных. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.